MÓDULO - 04

RAÍZES

MATEMÁTICA - A

TURMA DO JEJECA

CONCEITOS INICIAIS DE RADICIAÇÃO

*Consideremos um número real **a** (com a ≥ 0), e um número natural **n** (com n ≥ 1); denominamos raiz enésima de **a** o número real **b** (sendo b ≥ 0) tal que $b^n = a$.*

Radiciação é o inverso da potenciação.

Por exemplo, se elevarmos um número X à quinta potência e depois tirarmos a raiz quinta do resultado, voltaremos ao número X original.

NOTAÇÃO: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

a) O símbolo $\sqrt{\ }$ *é denominado* RADICAL

b) ***n*** *é o* ÍNDICE *do radical (deve-se ter* $n \in N^*$*)*

c) ***a*** *é o* RADICANDO *(deve-se ter a ≥ 0)*

d) ***b*** *é a* RAIZ ENÉSIMA *(deve-se ter b ≥ 0)*

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

1) Se **n** for **PAR**, $\sqrt[n]{a}$ só é definida para **a** ≥ 0.

2) Se **n** for **ÍMPAR**, $\sqrt[n]{a}$ está definida para todo **a** real

FIQUE ATENTO(A):

) É comum omitir o índice 2, assim: $\sqrt[2]{81} = \sqrt{81} = 9$

2) $\sqrt{25} = 5$ *e não* $\sqrt{25} = \pm 5$ *; lembre-se da seguinte regra:*

"A RAIZ DEVE TER SEMPRE O MESMO SINAL DO RADICANDO!"

3) $-\sqrt{25} = -5$ *; O resultado é negativo (apesar do índice ser par, porém o sinal negativo está em frente ao radical.*

PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

A) $\sqrt[n]{0} = 0$ B) $\sqrt[1]{a} = a$

C) $\sqrt[n]{1} = 1$ D) $\sqrt[n]{a^n} = a$

A seguir, vamos considerar satisfeitas todas as condições de existência (C.E.); portanto, serão válidas as propriedades operatórias.

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS RADICAIS

$(\sqrt[n]{a.b})^n = a.b$ $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$

EXERCÍCIOS DE ASSIMILAÇÃO

A.01. *Responda às seguintes perguntas:*

a) Existe raiz de índice par *quando o radicando é negativo? Explique.*

____
____
____
____

b) Existe raiz de índice ímpar *quando o radicando é negativo? Explique.*

____
____
____
____

A.02. *Calcular as raízes:*

a) $\sqrt{16}$ *b)* $\sqrt{9}$ *c)* $\sqrt{-36}$

d) $\sqrt[3]{27}$ *e)* $\sqrt[5]{32}$ *f)* $\sqrt[3]{125}$

g) $\sqrt[5]{-1024}$ *h)* $\sqrt{196}$ *i)* $\sqrt[3]{216}$

j) $\sqrt[8]{1}$ *k)* $\sqrt[4]{625}$ *m)* $\sqrt{-49}$

A.03. *Determine as raízes das seguintes frações:*

a) $\sqrt{\dfrac{1}{25}}$ *b)* $\sqrt{\dfrac{49}{4}}$ *c)* $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

d) $\sqrt{-\dfrac{1}{4}}$ *e)* $\sqrt{-\dfrac{25}{16}}$ *f)* $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}$

g) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}$ *h)* $\dfrac{2}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}}$ *i)* $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{4}}}$

A.04. *Encontre as raízes dos seguintes números decimais:*

a) $\sqrt{0{,}04}$ *b)* $\sqrt{0{,}16}$ *c)* $\sqrt{0{,}001}$

d) $\sqrt{2{,}25}$ *e)* $\sqrt{0{,}49}$

A. 05. *Verifique se a seguinte expressão possui resultado, explique sucintamente.*

$$E = \sqrt{\frac{4}{0}}$$

A. 06. *Efetue as operações indicadas reduzindo a um único radical e, simplifique quando for possível:*

a) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{2}$ *b)* $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ *c)* $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

d) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$ *e)* $\sqrt[4]{10} : \sqrt[4]{2}$ *f)* $\dfrac{\sqrt{8}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL

Você já estudou no módulo 2 o cálculo o cálculo de expoente inteiro. Estudaremos agora o conceito de potências para números na forma $2^{\frac{3}{2}}$; $16^{\frac{1}{2}}$; $4^{0,5}$; $8^{0,333..}$*; etc.*

As potências de expoente racional (como as vistas acima) podem ser transformadas para a forma de radical:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

ATENÇÃO, é necessário que se faça as seguintes considerações:

1) $a > 0$ *2)* $n \in \mathbb{N}^*$ *3)* $p \in Z$

Exemplos:

e.1) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$

e.2) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8}$

e.3) $81^{0,25} = \sqrt[4]{81}$

Importante: Faça um comentário a respeito de cada exemplo!

RADICAIS SEMELHANTES

Dois ou mais radicais são ditos semelhantes quando possuírem o mesmo índice e o mesmo radicando.

Exemplo: $2\sqrt[5]{3}$; $-6\sqrt[5]{3}$ *e* $\sqrt[5]{3}$ *são semelhantes!*

OPERAÇÕES COM RADICAIS

As operações com radicais estarão satisfeitas quando obedecerem as condições de existência.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE RADICAIS

Essas operações serão possíveis desde que os radicais sejam semelhantes, obedecida essa situação, mantemos o radical e somamos (ou subtraímos) os coeficientes. Exemplos:

a) $5\sqrt[3]{7} + 10\sqrt[3]{7} = (\underbrace{5+10}_{\text{Adição dos coeficientes}})\sqrt[3]{7} = 15\sqrt[3]{7}$

b) $2\sqrt[8]{5} - 4\sqrt[8]{5} + 7\sqrt[8]{5} = (\underbrace{2-4+7}_{\text{Adição dos coeficientes}})\sqrt[8]{5} = 5\sqrt[8]{3}$

EXERCÍCIOS DE ASSIMILAÇÃO

A.07. *Reduza ao mesmo índice:*

a) $\sqrt{2}; \sqrt[3]{5} e \sqrt[5]{3}$ *b)* $\sqrt{3}; \sqrt[3]{4} e \sqrt[4]{8}$

A.08. *As operações a seguir são possíveis somente quando todos os radicais estão com o mesmo índice. Efetue:*

a) $\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}$ *b)* $\dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$ *c)* $\dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}$

A.09. *Escreva na forma de radicais:*

a) $10^{4/5}$ *b)* $5^{1/3}$ *c)* $2^{-1/4}$ d) $X^{-2/3}$

A.10. *Calcule as potências:*

a) $9^{5/2}$ *b)* $1^{-3/2}$ *c)* $0{,}25^{1/2}$ *d)* $0{,}027^{-1/3}$

e) $16^{0,75}$ *f)* $8^{0.666...}$ *g)* $(0{,}25)^{0,5}$ *h)* $16^{1,25}$

A.11. *Calcule:*

a) $8^{\frac{1}{3}} + 3^0 - 2.4^{0,5}$ *b)* $27^{0,333..} + 27^{-\frac{2}{3}}$

c) $9^{\frac{-1}{2}} - (-1)^0 + \sqrt[3]{-1}$ *d)* $\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-0,333..}$

A.12. *Calcule:*

a) $\sqrt{36}+\sqrt{144}$ *b)* $\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{-1}$

c) $\sqrt{9}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[5]{-1}-\sqrt[3]{27}$

A.13. *Simplifique:*

a) $6\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{7}+6-2\sqrt{7}-9+\sqrt{7}$

e) $\sqrt{50}+4\sqrt{18}-6\sqrt{2}$

f) $5\sqrt{3}+\sqrt{12}-5\sqrt{48}$

g) $-2\sqrt{10}-5\sqrt{90}+8\sqrt{10}-4\sqrt{40}$

h) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt{8}$

i) $2\sqrt{2}-1-3\sqrt{3}+7(\sqrt{2}-\sqrt{3})-3(1-\sqrt{2})$

TAREFA DE APRIMORAMENTO

T.01. *Simplifique:*

a) $11\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-4\sqrt{2})-4(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

b) $12\sqrt{5}-3\sqrt{45}+\sqrt{125}-2\sqrt{20}$

c) $5\sqrt{6}+\sqrt{25}-2\sqrt{24}-3\sqrt{16}-\sqrt{96}$

d) $3\sqrt{99}-\frac{1}{2}\sqrt{44}-\frac{2}{3}\sqrt{11}-\frac{1}{4}\sqrt{1100}$

a)
b)

T.02. *Verifique se a sentença abaixo é verdadeira ou falsa e justifique.*

$$\sqrt{16}+\sqrt{9}=\sqrt{25}$$

____

____

____

____

____

____

MULTIPLICAÇÃO DE RADICAIS

Para multiplicar radicais de mesmo índice, devemos conservar o índice e multiplicar os radicandos, simplificando sempre que possível o resultado obtido. Para efetuar essa operação utilizamos a propriedade:

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Exemplos:

e.1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2\cdot 5}=\sqrt{10}$

e.2) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{6\cdot 7}=\sqrt[3]{42}$

DIVISÃO DE RADICAIS

Para dividir radicais de mesmo índice, devemos conservar o índice e dividir os radicandos, simplificando sempre que possível o resultado obtido.

Exemplos:

e.1) $\sqrt[3]{20}\div\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{\frac{20}{10}}=\sqrt[3]{2}$

e.2) $\sqrt{28}\div\sqrt{7}=\sqrt{\frac{28}{7}}=\sqrt{4}=2$

EXERCÍCIOS DE ASSIMILAÇÃO

A.14. *Efetue as multiplicações:*

a) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{6}=$ *b)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=$

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=$ *d)* $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}=$

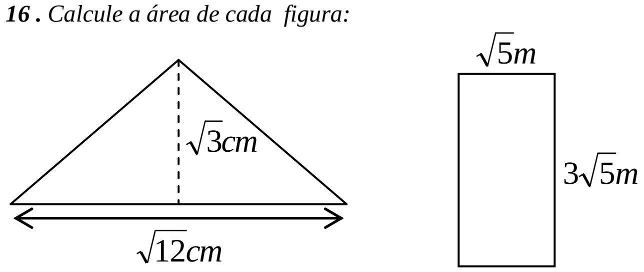
e) $\sqrt{5}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)=$ *f)* $\left(3\sqrt{2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+3\right)=$

A.15. *Efetue as divisões:*

a) $\sqrt{12}\div\sqrt{3}=$ *b)* $\sqrt{50}\div\sqrt{2}=$

c) $\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}=$ *d)* $\dfrac{12\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{2}}=$

A 16 . *Calcule a área de cada figura:*



A.17. *Calcule reduzindo a um só radical e simplifique quando possível:*

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}$ *b)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$ *c)* $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$

d) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$ *e)* $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$ *f)* $\sqrt[3]{6}\cdot 2\sqrt[3]{3}\cdot 5\sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ i) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

j) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ k) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ l) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}}{3}$

m) $\dfrac{\sqrt{72}+\sqrt{128}}{2}$ n) $\dfrac{12\sqrt{90}-8\sqrt{40}}{2\sqrt{10}}$

TAREFA DE APRIMORAMENTO

T.03. *Faça o MMC entre os índices dos radicais e reduza a um só radical:*

a) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{6}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[3]{100}}$

T.04. *Escreva na forma de um só radical:*

a) $\sqrt[5]{\sqrt{6}}$ b) $\sqrt{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$

d) $\sqrt[6]{\sqrt{3a}}$ e) $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{2}}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^2}}$

g) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^5}}}$

T.05. *Escreva cada uma das expressões seguintes na forma de um produto de radicais:*

a) $\sqrt{5\cdot 11}$

b) $\sqrt[3]{4\cdot 19}$

c) $\sqrt[4]{2^3\cdot 3\cdot 5}$

d) $\sqrt[9]{3^5.7}$

EXERCÍCIOS ESPECIAIS (AULA)

A.18. *Decomponha o radicando em fatores primos e escreva cada expressão na forma de um produto de radicais:*

a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt[4]{15}$ c) $\sqrt[5]{26}$ d) $\sqrt{30}$

A.19. *Transforme em um único radical cada uma das seguintes multiplicações:*

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}$ b) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{13}$ c) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{17}$

A.20. *Escreva na forma mais simples possível o produto abaixo, sabendo que* $x > 0$ *e* $y > 0$.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{y^3}}$$

EXTRAÇÃO DE FATORES DOS RADICAIS

Quando um ou mais fatores do radicando têm o expoente igual ao índice do radical, esses fatores podem ser extraídos do radicando e escritos como fatores esternos. Em diversas situações devemos fazer as simplificações que forem convenientes, até mesmo aplicação de propriedades de potenciação ou decomposição em fatores primos.

Exemplos – Simplifique os radicais:

A) $\sqrt{25.3}=\sqrt{5^2.3}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3}=5\cdot\sqrt{3}$

B) $\sqrt[3]{3.2^3.6^3}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{6^3}=\sqrt[3]{3}\cdot 2^{\frac{3}{3}}\cdot 6^{\frac{3}{3}}=$

$=\sqrt[3]{3}\cdot 2\cdot 6=12\sqrt[3]{3}$

C) $\sqrt{2^3}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

D) $\sqrt[9]{a^{11}b^{10}}=\sqrt[9]{a^9.a^2\cdot b^9\cdot b}=\sqrt[\cancel{9}]{a^{\cancel{9}}}\sqrt[9]{a^2}\sqrt[\cancel{9}]{b^{\cancel{9}}}\sqrt[9]{b}=$

$=ab\sqrt[9]{a^2b}$

Em diversas situações pode ocorrer a necessidade de decomposição do radicando em fatores primos, veja:

$\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Decompomos o radicando (45) em fatores primos:

45	3
15	3
5	5
1	

3x3x5 = 3^2 *x 5 = 45*

Assim podemos escrever: $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

A.21. *Simplifique os números abaixo, retirando, quando possível, fatores do radicando:*

a) $\sqrt{300}$ b) $\sqrt{500}$ c) $\sqrt{48}$

d) $\sqrt{720}$ e) $\sqrt[3]{375}$ f) $\sqrt[3]{250}$

A.22. *Simplifique retirando os fatores do radical:*

a) $\sqrt{t^5}$ *b)* $\sqrt{a^2 b^5}$ *c)* $\sqrt[8]{a^{16} b^{20}}$

d) $x\sqrt{x^3}$ *e)* $\dfrac{a^2}{b}\sqrt{a^3 b^3}$

A.23. *Simplifique as expressões:*

a) $ab\sqrt{180a^5 b^5}$ *b)* $a\sqrt[3]{54b^4}$ *c)* $\dfrac{3}{x}\sqrt{50x^5 y}$

A.25. *Se* $x = \sqrt{\sqrt[3]{4096}}$ *e* $y = \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$ *,*
calcule o valor de x + y.