MÓDULO - 01

TEORIA DOS CONJUNTOS

MATEMÁTICA - A

TURMA DO JEJECA

CONCEITOS PRELIMINARES

A idéia de conjuntos pode ser caracterizada por uma "coleção de objetos". Os objetos componentes de um conjunto são denominados *ELEMENTOS* do conjunto.

Tanto o *conjunto* quanto *elemento* são chamados de conceitos primitivos (não possuem definição)

Representação de um conjunto

I . Por extensão (ou tabular)

Nessa representação os elementos são dispostos entre chaves e separados por ponto e vírgula.

É utilizada para *conjuntos finitos* ou *infinitos*.

Exemplos:

e.1. Conjunto da vogais: A = {a; e; i; o; u}

e.2. Conjunto dos números ímpares positivos menores que 100:
B = {1; 3; 5; ...; 999}

e.3. Conjunto dos números ímpares positivos: C = {1; 3; 5; 7; 9; ...}

II. Representação por compreensão (ou propriedade)

Quando é fornecida uma propriedade característica dos elementos e, pode ser escrito por:

P = {x/x é equipe de fórmula 1}

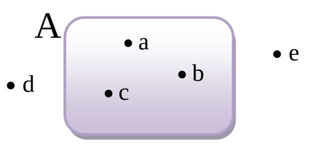
Lê-se: P é o conjunto dos elementos x tal que x é equipe de fórmula 1.
Nota: O símbolo (/) significa "*tal que*".

III. Representação por diagrama de Euler-Venn

É uma forma de representar que permite a visualização das relações entre um elemento e um conjunto, entre conjunto e conjunto, etc.

Nessa representação os elementos de um conjunto são representados por pontos interiores de uma figura fechada.

Pontos exteriores representam elementos que não pertencem ao conjunto.



IMPORTANTE
Para indicar que um elemento pertence a um conjunto, usamos o símbolo $\in$ (pertence) e, em caso contrário, utilizamos o símbolo $\notin$ (não pertence)

Para a figura anterior: $a \in A$
$d \notin A$

Obs.: Os símbolos $\in$ e $\notin$ são utilizados para relacionar elemento com conjunto.

CONJUNTO UNITÁRIO

Possui um único elemento

CONJUNTO VAZIO

É o conjunto que não possui nenhum elemento.

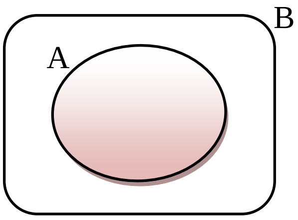
Este conjunto é representado por: $\varnothing$ ou { }

CONJUNTO UNIVERSO

É conjunto ao qual pertencem todos os conjuntos considerados. Representamos o conjunto universo por **U**.

SUBCONJUNTOS

Consideremos dois conjuntos **A** e **B**, o conjunto **A** será subconjunto do conjunto **B** se qualquer elemento de **A** também pertencer a **B**.
Nesse caso, dizemos que "**A** *está contido* em **B**" ou que **A** é subconjunto de **B**.



Em símbolos teremos:

$A \subset B$ → lê-se: **A** está contido em **B**
ou
$B \supset A$ → lê-se: **B** contém **A**

Também utiliza-se os símbolos:

$\not\subset$: não está contido
$\not\supset$: não contém
$\supseteq$: contém ou é igual
$\subseteq$: está contido ou é igual

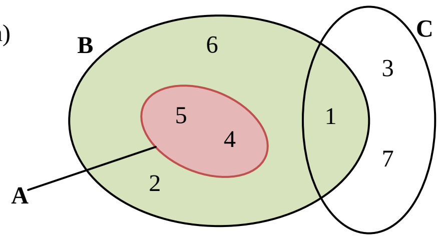
As relações entre "elementos e conjuntos" e entre "conjunto a conjunto", ficam bem resumidas no esquema:

Elemento $\xrightarrow{\in \text{ ou } \notin}$ Conjunto

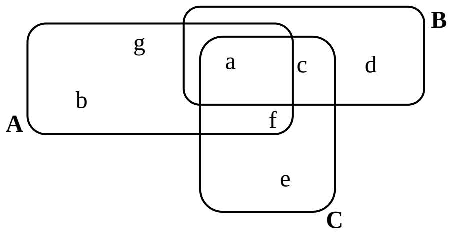
Conjunto $\xrightarrow[\not\subset \text{ ou } \not\supset]{\subset \text{ ou } \supset}$ Conjunto

A.01. Represente por extensão por extensão os conjuntos **A**, **B** e **C** dados em diagramas nos itens abaixo:

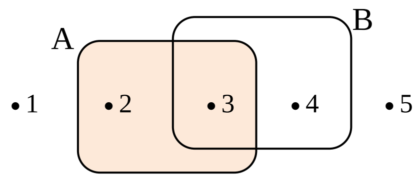
a)



b)



A.02. Dados, pelos diagramas de Euler-Venn, os conjuntos **A** e **B** e os elementos 1, 2, 3, 4 e 5; complete com os símbolos $\in$ ou $\notin$:



a) 1 ____ A e 1 ____ B b) 2 ____ A e 2 ____ B

c) 3 ____ A e 3 ____ B d) 4 ____ A e 4 ____ B

e) 5 ____A e 5 ____ B

Para darmos continuidade aos exercícios desse tópico, vamos enunciar algumas regras e propriedades que devem ser assimiladas:

✓ Dois conjuntos são iguais se possuírem os mesmos elementos independente da ordem entre eles (ou do número de vezes que figuram).

✓ O conjunto vazio deve ser representado por ∅ ou { }, mas nunca por { ∅ }, que significa "conjunto unitário"

✓ Nos conjuntos numéricos separamos os elementos por ponto-e-vírgula.

✓ Existem dois casos particulares de INCLUSÃO:
a)" Todo conjunto é subconjunto de si mesmo."

(∀A) (A ⊂ A)

b) "O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto."

(∀A) (∅ ⊂ A)

***** O símbolo** (∀), **significa "QUALQUER QUE SEJA."**

A.03. Considere os conjuntos: A = {1; 3; 4}, B = {1; 2; 3; 4} e C = {1; 2}.

Complete com os símbolos ⊂ ou ⊄ as sentenças abaixo:

a) A ____ B b) B ____ C c) A ____ A

d) C ____ A e) C ____ B f) C ____ C

g) ∅ ____A h)∅ ____ B i) ∅ ____ C

j) A ____ ∅ k) B ____ ∅ l) C ____ ∅

A.04. Complete com os símbolos ⊂ ou ⊃.

a) {1; 2} ___ {1} b) {1; 2} ___ {1; 2; 3}

c) {3; 2; 1} ___ {3; 3; 1; 1; 1; 2} d) ∅ ____ { 2}

e) {3}____ ∅ f) ∅ ____ ∅

CONJUNTO DAS PARTES

O conjunto das partes de um conjunto **A** é o conjunto formado por todos os subconjuntos de **A**.

Representamos o conjunto das partes por: **P(A)**.

Exemplo:

Considere o conjunto T = {1; 2; 3}, represente o conjunto P(T).

P(T) = {∅; {1}; {2}; {3}; {1; 2}; {1; 3}; {2; 3}; {1; 2; 3}}

Importante: note que todos os elementos de P(T) são conjuntos, portanto é necessário muita atenção ao emprego dos símbolos de pertinência e inclusão! Veja:

a) {1; 2} ∈ P(T) b) {{1; 2}} ⊂ P(T)

"Percebeu a diferença?"

Para calcularmos o número de subconjuntos que um conjunto possui, utilizamos a relação:

$$n[P(A)] = 2^k$$

onde **k** é o número de elementos do conjunto

EXERCÍCIOS DE ASSIMILAÇÃO

A.05. Dados os conjuntos A = {5; 12; 4x} e B = {12; 28; 5}, calcule o valor de x para que A = B.

A.06. Sendo A = {3; 4; 5}, determine P(A).

A.07. Determine o número de subconjuntos do conjunto M = {2; 4; 6; 8}.

A.08. Determine o número de subconjuntos não vazios possui o conjunto M do exercício anterior.

A.09. Dados os conjuntos A = {1; 2} e B = { {1}; {2} }, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) 1 ∈ A (v) b) 1 ∈ B (f) c) 2 ∉ A (f)

d) 2 ∉ B (v) e) {1} ∈ A (f) f) {1} ∈ B (v)

g) {2} ∉ A (v) h) {2} ∉ B (f) i) A = B (f)

APONTAMENTOS IMPORTANTES !!!

Nos conjuntos em que os elementos são também conjuntos, como por exemplo: A = { ∅; {1}; {2}; {3}; {1; 2}; {1; 2; 3} }

- Não é correto escrever 1 = {1}. O conjunto unitário {1} e o elemento desse conjunto (no caso o 1) são absolutamente distintos!

- Para o conjunto A, acima devemos observar que: ∅ ∈ A; {1} ∈ A; {2} ∈ A; {3} ∈A ; {1; 2} ∈ A e {1; 2; 3} ∈ A.

- CUIDADO! Observe que 1 ∉ A, assim como 2 ∉ A e também 3 ∉ A.

- {∅} é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio ∅. Assim, ∅ ∈ {∅}.

A.10. Considere M = {a; b; {a}; {a; b} }, complete com ∈ ou ∉:
a) b ___∈M b) {b}___∉M c) {1; 2}___∈M d) ∅___ ∉M

A.11. Sendo com ∈ ou ∉ as sentenças abaixo:
a) {1} __∉ {1; 2; 3} b) {1}___ ∈ {{1}; {2}; {3}} c) ∅___∈{∅}

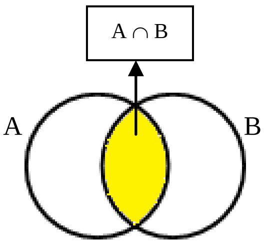
A.12. Classifique em verdadeiro ou falso:
a) ∅ ⊂ {3} (V) b) ∅∈ {3} (F) c) ∅ ∈ {∅; {3}} (V)
d) ∅ ⊂ {∅; {3}}(V) e) {3} ⊂ {3} (V) f) {3} ∈ {3} (F)
g) {3}∈ {∅;{3}} (V) h) {3} ⊂ {∅; {3}} (F)

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS (A ∩ B)

Considere dois conjuntos quaisquer A e B, interseção é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A **e** B.

A ∩ B (lê-se: "A inter B").



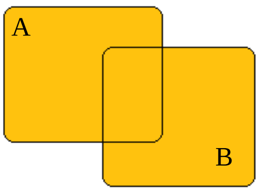
Se **A ∩ B** = ∅, isto é, os conjuntos A e B não têm elemento em comum dizemos que eles são DISJUNTOS

PROPRIEDADES
- A ∩ A = A
- A ∩ ∅ = ∅
- A ∩ B = B ∩ A

UNIÃO (REUNIÃO) DE CONJUNTOS (A ∪ B)

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, sua união é o conjunto dos elementos que pertencem a A **ou** a B.

A ∪ B (lê-se: "A união B").



PROPRIEDADES
- A ∪ A = A
- A ∪ ∅ = A
- A ∪ B = B ∪ A

DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS

A diferença A – B é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B! Observe o exemplo:

Dado o conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4, **5**} e o conjunto B = {**5**, 6, 7} a diferença desses conjuntos é representada por outro conjunto, chamado de conjunto diferença.

CONJUNTO COMPLEMENTAR

Quando B ⊂ A, a diferença A – B chama-se conjunto complementar de B em relação a A.

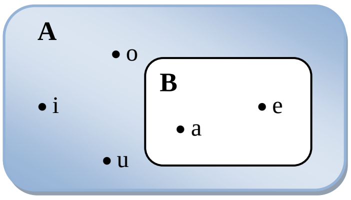
$C_A B = A - B$

Então A – B serão os elementos do conjunto A menos os elementos que pertencerem ao conjunto B.

Portanto A – B = {0, 1, 2, 3, 4}.

Exemplos:

e.01. Sendo A = {a; e; i; o; u} e B = {a; e}



Teremos:

A – B = {i; o; u}

e.02. Sendo A = {a; e; i; o; u} e B = {a; e; i}

Teremos: A – B = {o; u}

e.03. Sendo A = {a; e; i; o; u} e B = {a; e; i; x; y}
Poderemos ter:

A – B = {o; u}
B – A = {x; y}

NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO DE CONJUNTOS

Indicamos por n(A) o número de elementos do conjunto A;
n(B) o número de elementos do conjunto B; n(A∩B) o número de elementos da interseção entre os conjuntos A e B e, n(A∪B) o número de elementos da união entre os conjuntos A e B, é válida a seguinte relação:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Muita atenção aos conectivos:
- "***e*** (símbolo: ∧)", associamos à *interseção*
- "***ou*** (símbolo: ∨)", associamos à *união.*

a) 50%

EXERCÍCIOS DE ASSIMILAÇÃO

A.13. Considere os conjuntos A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}, B = {3; 5; 7} e C = {5; 6; 7; 8; 9}, Determine:

a) A – B =

b) A – C =

c) C – B =

d) B – A =

e) C – A =

f) A ∩C =

g) B∩C =

h) A ∩ (B ∩ C) =

i) (A – C) ∩ B =

A.14. Faça um diagrama de Euler-Venn para cada item do exercício anterior.

A.15. Sendo n(A∪B) = 70, n(A) = 30 e n(B) = 60, calcule n(A∩B).
Resposta: 20

A.16. Numa pesquisa sobre emissoras de TV a que habitualmente assistem, foram consultadas 450 pessoas, com o seguinte resultado: 230 preferem o canal A; 250, o canal B e 50 preferem outros canais diferentes de A e B. Pergunta-se:
a) Quantas pessoas assistem aos canais A e B?
b) Quantas pessoas assistem ao canal A e não assistem ao canal B?
c) Quantas pessoas assistem ao canal B e não assistem ao canal A?
d) Quantas pessoas não assistem ao canal A?
Respostas: a) 80 b) 150 c) 170 d)220

π VESTIBULARES

V.01. (Unimontes-MG) X e Y são dois conjuntos, sendo que o conjunto X tem 48 subconjuntos a mais do que o conjunto Y. Logo, Y tem:
a) 6 elementos b) 5 elementos c) 4 elementos d) 2 elementos

V.02. (Fatec-SP) O conjunto A tem 20 elementos; A∩B tem 12 elementos e A∪B tem 60 elementos. O número de elementos do conjunto B é:
a) 28 b) 36 c) 40 d) 48 e) 52

V.03. (Cesgranrio-RJ) Sejam os conjuntos U = {1, 2, 3, 4} e A = {1, 2}.
O conjunto B tal que B ∩ A = {1} e B ∪ A = U é:
a) ∅ b) {1} c) {1, 2} d) {1, 3, 4} e) U

V.04. (FGV-SP) Numa Universidade com N alunos, 80 estudam Física, 90 Biologia, 55 Química, 32 Biologia e Física, 23 Química e Física, 16 Biologia e Química e 8 estudam nas três faculdades. Sabendo-se que esta Universidade somente mantém as três faculdades, quantos alunos estão matriculados na Universidade?
a) 304 b) 162 c) 146 d) 154 e) 286

V.05. (PUC-SP) Em um exame vestibular, 30% dos candidatos eram da área de Humanas. Dentre os candidatos, 20% optaram pelo curso de Direito. Do total de candidatos, qual a porcentagem dos que optaram por Direito?

b) 20% c) 10% d) 6% e) 5%

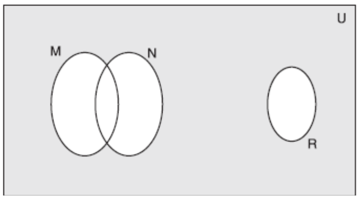
V.06. (UFAL) Se A e B são dois conjuntos não-vazios tais que:
A∪B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A – B = {1, 3, 6, 7} e B – A = {4; 8}.
Então A∩B é o conjunto:
a) ∅ b) {1; 4} c) {2; 5} d) {6; 7; 8} e) {1; 3; 4; 6; 7; 8}

V.07. (UEL) Se A = {1}, B = {0, 1} e E = {0; 1; 2}, então $C_E^{(A\cap B)}$ é o conjunto:
a) ∅ b) {0} c) {1} d) {0; 2} e) {1; 2}

V.08. (Mackenzie-SP) Sendo A = {{1}; {2}; {1; 2}}, podemos afirmar que :
a) {1} ∉ A b) {1} ⊂ A c) {2} ⊂ A
d) 2 ∈ A e) {{1}} ⊂ A

V.09. (Fatec-SP) Se A = {2; 3; 5; 6; 7; 8}, B = {1; 2; 3; 6; 8} e C = {1; 4; 6; 8}, então:
a) (A – B) ∩ C = {2} b) (B – A) ∩ C = {1}
c) (A – B) ∩ C = {1} d) (B – A) ∩ C = {2} e) n.d.a.

V.10. (Cefet-PR) A parte escura do diagrama representa o conjunto:



a) U – (M ∩ N – R)
b) U – (M ∪ N ∪ R)
c) U – (M ∪ N – R)
d) U ∩ M ∪ N ∪ R
e) U – (M ∩ N) – R

V.11. (ITA-SP) Denotemos por n(X) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que n(A ∪ B) = 8, n(A ∪ C) = 10, n(A ∪ B ∪ C) = 11 e n(A ∩ B ∩ C) = 2.
Então, n(A) + n(B) + n(C) é igual a:
a) 11 b) 14 c) 15 d) 18 e) 25

V.12. (UFGS) O número de elementos do conjunto P(A) ∪ P(B), com A e B disjuntos e com dois elementos cada um, é:
a) 2 b) 4 c) 5 d) 7 e) 8

V.13. (UCSal-BA) Três conjuntos não vazios A, B e C são tais que A = {0; 1}, B ∪ C = {0; 2; 3}, A ∪ B = {0; 1; 2} e B ∩ C = {0}.
Nessas condições, é verdade que B é o conjunto:
a) {0; 1} b) {0; 2} c) {0; 3} d) {1; 2} e) {1; 3}

V.14. **(UERJ)** Em um posto de saúde foram atendidas, em determi- nado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas diarréia, febre, dor no corpo, isoladamente ou não.
A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela abaixo:

Sintomas	*Frequência*
Diarréia	62
Febre	62
Dor no corpo	72
Diarréia e febre	14
Diarréia e dor no corpo	8
Febre e dor no corpo	20
Diarréia , febre e dor no corpo	X

Qual o valor de X:
a) 6 b) 8
c) 10 d) 12

V.15. (Fuvest-SP) No vestibular da Fuvest exigia-se dos candidates à carreira de administração a nota mínima 3,0 em Matemática e em Redação. Apurados os resultados, verificou-se que 175 candidatos foram eliminados em Matemática e 76 candidatos foram eliminados em Redação. O número total de candidatos por essas duas disciplinas foi 219.
Qual foi o número de candidatos eliminados apenas pela Redação?

a) 24 b) 143 c) 32 d) 44 e) 99